Devoir 1 corrigé
Modèle 2

Deuxième bac science expérimentale

Continuité 10 points
Dérivabilité 10 points

Prof Fayssal

https://elboutkhili.jimdofree.com

Sabil Al Falah	Etablissement Sabil Al Falah مؤسسة سبيل الفلاح	Devoir 01corrigée (Modèle 2)	2 bac biof 2023	Prof :Fayssal EL boutkhili

Barème

Exercice 1

3,5P

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

1 — **1)** Etudier la continuité de f en 1

1 — **2)** Montrer que f est dérivable en 1

1 — **3)** Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 1

0,5 — **4)** Déduire une valeur approchée de $f(1{,}001)$

Exercice 2

4,5P

1) Calculer les limites suivantes :

1+1+1 — $a)\ \lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$

2) Résoudre dans IR les équations suivantes :

1 ,5 — $$(E_1) : \sqrt{x+2}-4\sqrt[4]{(x+2)}+3=0$$

Exercice 3

5P

Soit f la fonction définie sur $I=[1,+\infty[$ par : $f(x)=x^3-3x-3$

1.5 — **1)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

1 — **2)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;3[$

1,5 — **3)** Etudier le signe de f sur I puis résoudre dans I l'inéquation : $f(x)<0$

1 — **4)** Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Exercice 4

7P

Soit f une fonction numérique définit par $f(x)=x-2\sqrt{x}$

1 — 1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1 — 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

0.5 — b) Donner une interprétation géométrique

1 — 3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

1 — b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f en justifiant votre réponse

0.5 — c) Déterminer les extremus de f s'il exite

4) Soit g la restriction de f sur $I=[0;1]$

1 — a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

1 — b) Comparer $g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ en justifiant votre réponse

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$

3) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 1

4) Déduire une valeur approchée de $f(1,001)$

Solution de l'exercice 01 :

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} (\sqrt{x}+1) = 2 = f(1)$$

D'où la fonction f est continue en 1

2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}+1)-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

3) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 1

$f(x) \cong f'(1)(x-1) + f(1)$ au voisinage de 1

$f(x) \cong \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ au voisinage de 1

5) Déduire une valeur approchée de $f(1,001)$

$f(1,001) \cong \frac{1}{2} \times 1,001 + \frac{3}{2} \cong 0,5005 + 1,5 \cong 2,0005$

Exercice 2

1)Calculer les limites : 1) $\lim_{x\to9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; 3) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$

2)Résoudre dans IR les équations suivantes : $\sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{(x+2)} + 3 = 0$

Solution de l'exercice 02 :

1)a) $\lim_{x\to9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0$, et $\lim_{x\to9} x - 9 = 0$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

Rappel ; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{x-1-8}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]} = \frac{1}{\left[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2\right]}$$

$$= \frac{1}{[4+4+4]} = \frac{1}{12}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

Car: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}$$

2) L'équation (E_1) est définit si $x + 2 \geq 0$

Donc le domaine de définition est : $D_{(E_1)} = [-2;+\infty[$

$$\sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{(x+2)} + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x+2})^2 - 4\sqrt[4]{x+2} + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0$ avec $X = \sqrt[4]{x+2}$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 3$ avec $X = \sqrt[4]{x+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x+2} = 1$ ou $\sqrt[4]{x+2} = 3$

$\Leftrightarrow x + 2 = 1^4$ ou $x + 2 = 3^4$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3^4 - 2$

Les deux solutions sont dans $D_{E_1} = [-2;+\infty[$

Donc $S = \{-1; 3^4 - 2\}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2; 3[$

3) Déterminer le signe de f sur $[1, +\infty[$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Solution de l'exercice 03 :

1) * La fonction f est continue sur I car c'est une polynôme

* La fonction f est dérivable sur I , et pour tout x dans I on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$x \in [1, +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) \geq 0$

Donc f est strictement croissante sur I

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J et :

$$J = f([1, +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-5; +\infty[$$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$

* La fonction f est continue sur I car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur I

* $f(2) = -1$ et $f(3) = 15$ donc $f(2) \times f(3) < 0$ donc $2 < \alpha < 3$

3) Etudier le signe de f sur I puis résoudre dans I l'inéquation : $f(x) > 0$

Soit $x \in [1; \alpha]$

Donc $1 \leq x \leq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur $[1; \alpha]$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \leq 0$

Soit $x \in [\alpha, +\infty[$

Donc $x \geq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \geq 0$

Résoudre l'inéquation dans I l'inéquation suivante : $(I): f(x) > 0$

Le tableau de signe de f sur I

x	1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

D'où $S =]\alpha; +\infty[$

4)On a $f(\alpha) = 0$ donc $f^{-1}(0) = \alpha$

On a la fonction f est dérivable en α et $f'(\alpha) = 3(\alpha^2 - 1) \neq 0$

Car : $2 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 3 < \alpha^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow 9 < 3(\alpha^2 - 1) < 24$

Donc f^{-1}est dérivable en 0 ; et on a : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Exercice 4

f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f *et* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

b)Donner une interprétation géométrique

3) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f sur D_f

d) Dresser le tableau de variations de f

e) Déterminer les extremus de f

4) Soit g la restriction de f sur $\mathrm{I} = [1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Déterminer $\mathrm{g}^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$

Solution de l'exercice 04 :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2)*a*) $$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

b) Interprétation géométrique

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le bas

3)a) Soit $x \in]0;+\infty[$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (Somme de deux fonctions)

$$f'(x) = 1 - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$

b)Etudier les variations de f

Soit $x \in]0;+\infty[$,

On a $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$

Donc $\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]0;+\infty[$est le signe de $x-1$ qui s'annule en 1

On dresse le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)=0$	↘	$f(1)=-1$	↗	$+\infty$

c) Déterminer les extremus de f s'il exite

Le nombre -1 est une valeure minimale de f atteint en 1 sur $[0;+\infty[$

4)a) * La fonction g est continue sur I (car c'est une somme de deux fonctions continues sur I)

* La fonction g est strictement décroissante sur *I*

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur J et :

$$J = g([0;1]) = [g(1);g(0)] = [-1;0]$$

b) Comparer $g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ en justifiant votre réponse

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) < g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (*car g^{-1} est str décroissante*)

c) Soit $x \in [-1;0]$ cherchons $y \in [0;1]$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + (1)^2 = x + (1)^2$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 = x+1\ ;$$
$$\Leftrightarrow |\sqrt{y}-1| = \sqrt{x+1} \quad ;\ (\text{car } x+1 \geq 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}-1 = -\sqrt{x+1} \quad ;\ (\text{car } \sqrt{y}-1 \leq 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = -\sqrt{x+1}+1 \quad \Leftrightarrow y = \left(1-\sqrt{x+1}\right)^2$$

$g^{-1}(x) = \left(1-\sqrt{x+1}\right)^2$ pour tous $x \in [-1;0]$