Corrigée de série 1

Notions de logique

Premier bac science

Economie

Prof Fayssal https://elboutkhili.jimdofree.com/

Exercice 1

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$P_1 : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ 3x + 6 = 0\,;$

$P_2 : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 3x + 2 = 0;$

$P_3 : (\forall\, x \in [1;6]) :\ x^2 - 7x + 6 \leq 0$

$P_4 : (\forall\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 2x + 3 > 0;$

Rappel 1 : Quantificateur : ∀ ; ∃

- Le quantificateur **pour tout** ou **quel que soit** est noté par : ∀ .

La proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie

- Le quantificateur **il existe au moins un** est noté par : ∃

la proposition $(\exists x \in E); p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- Le quantificateur **il existe un unique** est noté par : ∃!
  la proposition $\exists!\, x \in E; p(x)$ est vraie lorsqu'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- $\overline{(\forall x \in E); p(x)}$ est : $(\exists x \in E);\ \overline{p(x)}$
- $\overline{(\exists x \in E); p(x)}$ est : $(\forall x \in E);\ \overline{p(x)}$

Rappel 2 : Signe de : $ax^2 + bx + c$

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$

Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$

Sont : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ une racine dans $\mathbb{R}$

est : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Solution

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$P_1 : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ 3x + 6 = 0\,;$

Résoudrons l'équation $3x + 6 = 0$

$3x + 6 = 0$ donc $3x = -6$

Donc : $x = -\frac{6}{3}$; donc $x = -2$

D'où P_1 est vraie

$\overline{P_1} : (\forall\, x \in \mathbb{R}) :\ 3x + 6 \neq 0\,;$

$P_2 : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 3x + 2 = 0;$

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

On pose : $a = 1$; $b = -3$ et $c = 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

Donc $\Delta > 0$ d'où $l'équation$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc P_2 est vraie

$\overline{P_2} : (\forall\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 3x + 2 \neq 0;$

$P_3 : (\forall\, x \in [1;6]) :\ x^2 - 7x + 6 \leq 0$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

On pose : $a = 1$; $b = -7$ et $c = 6$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25$

Donc $\Delta > 0$ d'où $l'équation$ $x^2 - 7x + 6 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad et \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 6 \quad et \quad x_2 = 1$$

Tableau de Signe de $x^2 - 7x + 6$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$		+	0	−	0	+	

Donc P_3 est vraie

$\overline{P_3} : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 7x + 6 > 0;$

$P_4 : (\forall\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 2x + 3 > 0;$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 2x + 3 > 0$

On pose : $a = 1$; $b = -2$ et $c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$

Donc $\Delta < 0$ d'où $l'équation$ $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Donc le Signe de $x^2 - 2x + 3$ est le signe de de $a = 1 > 0$

Donc : $(\forall\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 2x + 3 > 0$

Donc

Donc P_4 est vraie

La négation de P_4

$\overline{P_4} : (\exists\, x \in \mathbb{R}) :\ x^2 - 3x + 2 \leq 0;$

Exercice 2 : (Contre-exemple)

1) Montrer que les propositions sont fausses :

P_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2} = x$ »

P_2 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 \geq x$ »

2) Donner la négation de la proposition (R).

(R): $(\forall x \in \mathbb{R})$: $[\, x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$

3) En déduire que la proposition R est fausse.

Rappel 3 : Résonnement par contre-exemple

Pour montrer que la proposition

$(\forall x \in E); p(x)$ est fausse , il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E)$; $\overline{p(x)}$ est vraie

Solution

1) Montrer que les propositions sont fausses :

P_1 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2} = x$ »

Montrons que $\overline{P_1}$: $(\exists x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2} \neq x$ est vraie

Pour $x = -1$ $on\ a$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Donc $1 \neq -1$

Donc $\overline{P_1}$ est vraie d'où est P_1 fausse

Remarque : on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2} = |x|$

P_2 : « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 \geq x$ »

Montrons que $\overline{P_2}$: $(\exists x \in \mathbb{R})$: $x^2 < x$ est vraie

Pour $x = \frac{1}{2}$ $on\ a$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $donc$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

Donc $\overline{P_2}$ est vraie d'où est P_2 fausse

Remarque : Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'inéquation $x^2 < x$

On trouve $S =]0; 1[$

2) Donner la négation de la proposition (R).

(R): $(\forall x \in \mathbb{R})$: $[\, x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$

Rappel : la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est : $(P$ et $\overline{Q})$

$(\overline{R})$: $(\exists x \in \mathbb{R})$: $[\, x^2 = 2x \ \ et\ x \neq 0]$

3) En déduire que la proposition R est fausse.

Pour $x = 2$ $on\ a$: $x^2 = 2x \ \ et\ x \neq 0$

Donc $\overline{R}$ est vraie d'où est R fausse

Remarque : Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'inéquation $x^2 = 2x$

On trouve $S = \{0; 2\}$

Exercice 3 : (Contre-exemple)

f fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Donner la négation de la proposition (P)

(P): $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)$: " $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

3) Déduire que (P) est fausse

4) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Solution

f fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

On pose : $a = 1$; $b = -3$ et $c = 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

Donc $\Delta > 0$ d'où $l'équation$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} \quad et \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 2 \quad et \quad x_2 = 1$$

$Donc$: $S = \{1; 2\}$

2) Donner la négation de la proposition (P)

(P): $\left(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$: " $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$(\overline{P})$: $\left(\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$: " $f(a) = f(b)$ et $a \neq b$

4) Déduire que (P) est fausse

On a d'après la question 1) ;

$f(1) = f(2) = 0$ car 1 et 2 sont des solution de l'équation $f(x) = 0$ et $1 \neq 2$

Donc $(\overline{P})$ est varie ; D'où (P) est fausse

5) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Rappel 04 :

- La fct f est paire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- La fct f est impaire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

$On\ a$: $f(1) = 0$ et $f(-1) = 6$

Donc $f(-1) \neq f(1)$ d'où f n'est pas paire

Et on a : $f(-1) \neq -f(1)$ donc la fonction f n'est pas impaire

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$; considérons la proposition (P) :

$$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x = 0\ ou\ x = 4).$$

1) Montrer que la proposition (P) est vraie

2) Déterminer l'implication contraposée de P

Rappel 05 :

- Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie
- la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Solution

1) Montrer que la proposition (P) est vraie

$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x^2 - 4x = 0)$

$\Rightarrow x(x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ ou\ x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x = 0\ ou\ x = 4)$

2) Déterminer l'implication contraposée de P

$$(x \neq 0\ \ et\ \ x \neq 4) \Rightarrow (x^2 \neq 4x)$$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : 1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Rappel 06 :

L'ensemble de définition d'une fonction f noté par D_f est l'ensemble des nombres réels x tel que $f(x) \in \mathbb{R}$

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

Solution

1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$

$x \in D_f \iff x^2 - 4 \neq 0$

$\iff x^2 \neq 4$

$\iff x \neq \sqrt{4}$ et $x \neq -\sqrt{4}$

$\iff x \neq 2$ et $x \neq -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

$x \in D_f \iff 6 - 2x \geq 0$

$\iff -2x \geq -6$

$\iff x \leq \frac{-6}{-2}$

$\iff x \leq 3$

Donc $D_f =]-\infty; 3]$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$x \in D_f \iff x^2 - 2x + 2 \geq 0$

$\iff x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0$

$\iff (x-1)^2 + 1 \geq 0$

La proposition $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2ème méthode : on peut calculer delta qui est négative donc le signe de $x^2 - 2x + 2$ est le signe de $a = 1 > 0$

Donc $x^2 - 2x + 2$ toujours positive pour tout x dans $\mathbb{R}$; Donc $D_f = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

$x \in D_f \iff x^2 - 5x \geq 0$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 5x = 0$

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x - 5 = 0$

$\Rightarrow (x = 0$ ou $x = 5)$

Tableau de Signe de : $x^2 - 5x$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$x^2 - 5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

Exercice 6 (Résonnement déductif ; direct)

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow (y = 1$ ou $x = 1)$

3) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

Rappel 07 :

- Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est et on montre que Q est vraie
- *Si* : $X^2 = 0$ *alors* $X = 0$; $X \in \mathbb{R}$

Solution

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$

$\Rightarrow (x - y)^2 = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow x = y$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$1 + x(y-1) - y = 0 \Rightarrow (y = 1$ ou $x = 1)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow 1 + x(y-1) - y = 0$

$\Rightarrow x(y-1) - y + 1 = 0$

$\Rightarrow x(y-1) - (y-1) = 0$

$\Rightarrow (y-1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow y - 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$\Rightarrow (y = 1$ ou $x = 1)$

3) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors $m+n$ est pair

On a : m et n des entiers impairs donc il existe deux entiers naturels k et k' tels que : $m = 2k+1$ $et\ n = 2k'+1$

$Donc:$ $m+n = 2k+1+2k'+1$

$Donc:$ $m+n = 2k+2k'+2$

$Donc:$ $m+n = 2(k+k'+1)$

Donc $m+n$ est un entier pair

Exercice 7 : (Equivalence)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2) Soient $x\ et\ y$ deux réels positifs . Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0\ ou\ y = 0$

3) Soient $a\ et\ b$ deux réels positifs Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0\ et\ b=0)$

4) a) x et y deux réels positifs. Montrer que : $(x+y+13 = 4\sqrt{x}+6\sqrt{y}) \Leftrightarrow (x=4\ et\ y=9)$

b) $\left(\frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow (x=y=1)$

Solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+1} - \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x+1)-3(x^2+1)}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+2-3x^2-3}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0$$; (qui est vrais)

Donc: $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2ème méthode : On a : $x^2+1 > 0\ donc$:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+x+1) \leq 3(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+x+1) - 3(x^2+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+2-3x^2-3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0$$; (qui est vrais)

Donc: $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2)Soient $x\ et\ y$ deux réels positifs .Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow x=0\ ou\ y=0$

Soient $x\ et\ y$ deux réels positifs

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x+y}^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2$$

$$\Leftrightarrow x+y = x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0\ ou\ \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ y = 0$$

3)Soient $a\ et\ b$ deux réels positifs ;Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0\ et\ b=0)$

Si $a=0\ et\ b=0$ alors $a+b=0$

Montrons que : $a+b=0 \Rightarrow a=0\ et\ b=0$

$On\ a:$ $a+b=0$ et $b \geq 0$

Donc : $a = -b\ et\ b \geq 0\ \ donc\ -b \leq 0$

Donc : $a \leq 0$ et on a : $a \geq 0$

Donc $0 \leq a \leq 0\ \ donc\ \ a = 0$

On a $a+b=0\ et\ a=0$ donc $b=0$

Donc $a=0\ et\ b=0$

3) x et y deux réels positifs. Montrer que : $x+y+13 = 4\sqrt{x}+6\sqrt{y} \Leftrightarrow x=4\ et\ y=9$

$$x+y+13 = 4\sqrt{x}+6\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\times 2\sqrt{x} + 2^2 + \sqrt{y}^2 - 2\times 3\sqrt{y} + 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + (\sqrt{y}-3)^2 = 0$$

On a : $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0\ \ et\ \ (\sqrt{y}-3)^2 \geq 0$

Donc d'après le résultat précédente on a :

$$(\sqrt{x}-2)^2 = 0\ \ et\ \ (\sqrt{y}-3)^2 = 0$$

$Donc:$ $\sqrt{x}-2 = 0\ \ et\ \sqrt{y}-3 = 0$

$Donc:$ $\sqrt{x} = 2\ \ et\ \sqrt{y} = 3$

$Donc:$ $x = 4\ \ et\ y = 9$

Exercice 8 : (Disjonction des cas) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier n^2+n+1 est impair

Utiliser les cas $(n=2k)$ et $(n=2k+1)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Utiliser les cas $n=3k; n=3k+1; n=3k+2$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1}-x>0$

Utiliser les deux cas : $(x<0)$ et $(x \geq 0)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1): $x^2-|x-1|-1=0$

Utiliser les deux cas : $(x<1)$ et $(x \geq 1)$

(E_2) : $|x+1|-3|x-2|+1=0$

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier n^2+n+1 est impair

Cas 1 : n est pair donc $n=2k$; $k \in \mathbb{N}$

$$n^2+n+1=(2k)^2+2k+1$$
$$=4k^2+2k+1$$
$$=2(2k^2+k)+1$$

Donc l'entier n^2+n+1 est impair

Cas 1 : n est pair donc $n=2k+1$; $k \in \mathbb{N}$

$$n^2+n+1=(2k+1)^2+2k+1+1$$
$$=4k^2+4k+1+2k+2$$
$$=4k^2+6k+2+1$$
$$=2(2k^2+3k+1)+1$$

Donc l'entier n^2+n+1 est impair

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier n^2+n+1 est impair

2)Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}$

les restes de la division euclidienne de n par 3 sont 0 ou bien 1 ou bien 2 ; d'où les cas :

$$n=3k \ ou \ n=3k+1 \ ou \ n=3k+2$$

Cas 1 : $n=3k$; $k \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Cas 2 : $n=3k+1$; $k \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2)$$
$$=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$$
$$=3(3k+1)(3k+2)(k+1)$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Cas 2 : $n=3k+2$; $k \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2)$$
$$=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$$
$$=3(3k+2)(k+1)(3k+4)$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion ; l'entier $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

3)Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1}-x>0$

Cas 1 : $x \in]-\infty;0]$; *c-t-dire* $x \leq 0$

On a $x \leq 0$ *donc* $-x \geq 0$

Et on a : $\sqrt{x^2+1}>0$

Donc $\sqrt{x^2+1}-x>0$

Cas 2 : $x \in]0;+\infty[$; *c-t-dire* $x>0$

1ère méthode :

On a : $x^2+1>x^2$ *donc* : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$

donc : $\sqrt{x^2+1}>|x|$

Et on a : $x>0$ *donc* $|x|=x$

donc : $\sqrt{x^2+1}>x$

Donc : $\sqrt{x^2+1}-x>0$

2ème méthode :

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}>0 \ ; \ car\ x>0$$

Donc : $\sqrt{x^2+1}-x>0$

4)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

(E_1): $x^2-|x-1|-1=0$

Rappel :

$|x-1|=x-1 \quad si \quad x \geq 1$

$|x-1|=-(x-1) \quad si \quad x<1$

Cas 1 : $x \in [1;+\infty[$; *c-t-dire* $x \geq 1$

Donc $|x-1|=x-1$

$$x^2-|x-1|-1=0 \Rightarrow x^2-(x-1)-1=0$$
$$\Rightarrow x^2-x+1-1=0$$
$$\Rightarrow x^2-x=0$$
$$\Rightarrow x(x-1)=0$$

$\Rightarrow x = 0 \; ou \; (x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1$

Or : $0 \notin [1;+\infty[$

Donc $S_1 = \{1\}$

Cas 2 : $x \in]-\infty;1[$; c-t-dire $x < 1$

Donc $|x-1| = -(x-1)$

$x^2 - |x-1| - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (x-1) - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

On pose : $a = 1$; $b = 1$ et $c = -2$

$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$

Donc $\Delta > 0$ d'où $l'équation\; x^2 + x - 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} \quad et \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1}$$

$$x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = -2$$

Or : $1 \notin]-\infty;1[$

Donc $S_2 = \{-2\}$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \{-2;1\}$

4) b)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(E_2) : |x+1| - 3|x-2| + 1 = 0$

Rappel :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & si \quad x < 1 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & si \quad x < 2 \end{cases}$$

On trace le tableau des cas suivants :

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$

Donc d'après le tableau il y a trois cas :

Cas 1 : $x \in [2;+\infty[$

$|x+1| - 3|x-2| + 1 = 0$

$\Rightarrow x + 1 - 3(x-2) + 1 = 0$

$\Rightarrow x + 1 - 3x + 6 + 1 = 0$

$\Rightarrow -2x + 8 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-8}{-2}$

$\Rightarrow x = 4 \in [2;+\infty[$

Donc: $S_1 = \{4\}$

Cas 2 : $x \in]-1;2[$;

$|x+1| - 3|x-2| + 1 = 0$

$\Rightarrow x + 1 - 3(-x+2) + 1 = 0$

$\Rightarrow x + 1 + 3x - 6 + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4}{4}$

$\Rightarrow x = 1 \in]-1;2[$

Donc: $S_2 = \{1\}$

Cas 3 : $x \in]-\infty;-1]$;

$|x+1| - 3|x-2| + 1 = 0$

$\Rightarrow -x - 1 - 3(-x+2) + 1 = 0$

$\Rightarrow -x - 1 + 3x - 6 + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3}$

$\Rightarrow x = 2 \notin]-\infty;-1]$

Donc: $S_3 = \Phi$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{4\,;1\}$

Exercice 9

Raisonnement par contra-posée

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :

   a) $(y \neq 2 \; et \; y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

   b) $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que si $(n^2 \; est \; pair)$ alors $(n \; est \; pair)$

3) Soient $x; y \in]2;+\infty[$, montrer que $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Rappel 08 :

Résonnement par contraposition

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

Pratiquement :on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est vraie

Solution

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :

a) $(y \neq 2 \; et \; y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

Soit $y \in \mathbb{R}$:Par contraposée montrons que

$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow (y = 2 \; ou \; y = -2)$

$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow 2y^2 = 8$

$\Rightarrow y^2 = \frac{8}{2}$

$\Rightarrow y^2 = 4$

$\Rightarrow (y = 2 \; ou \; y = -2)$

D'où : $(y \neq 2 \; et \; y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

b) Montrons : $(x \neq 0) \Rightarrow \left(\sqrt{x+1} \neq 1+\frac{x}{2}\right)$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+$; par contraposée montrons :

$$\left(\sqrt{x+1} = 1+\frac{x}{2}\right) \Rightarrow (x=0)$$

$$\sqrt{x+1} = 1+\frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2+x}{2}$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 2+x$$
$$\Rightarrow \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = (2+x)^2$$
$$\Rightarrow 4(x+1) = 4+4x+x^2$$
$$\Rightarrow 4x+4-4-4x-x^2 = 0$$
$$\Rightarrow -x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

D'où : $(x \neq 0) \Rightarrow \left(\sqrt{x+1} \neq 1+\frac{x}{2}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que si $(n^2$ *est pair*$)$ alors $(n$ *est pair*$)$

Soit : $n \in \mathbb{N}$; par contraposée montrons :

si $(n$ *est impair*$)$ alors $(n^2$ *est impair*$)$

On a : n *est impair donc* $n = 2k+1$; $k \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 = (2k+1)^2$

Donc : $n^2 = (2k)^2 + 2\times 2k + 1$

Donc : $n^2 = 4k^2 + 2\times 2k + 1$

Donc : $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$

Donc : n^2 est impair

D'où : si $(n^2$ *est pair*$)$ alors $(n$ *est pair*$)$

3) Soient $x; y \in]2;+\infty[$, montrer que $(x \neq y) \Rightarrow (x^2-4x \neq y^2-4y)$

Soient $x; y \in]2;+\infty[$; par contraposée montrons : $(x^2-4x = y^2-4y) \Rightarrow x = y$

$$x^2-4x = y^2-4y \Rightarrow x^2-4x+4 = y^2-4y+4$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2-(y-2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2+y-2)(x-2-y+2) = 0$$
$$\Rightarrow (x+y-4)(x-y) = 0$$
$$\Rightarrow x+y-4 = 0 \ ou \ x-y = 0$$

On a : $x; y \in]2;+\infty[$

Donc $x > 2$ *et* $y > 2$ *donc* $x+y > 4$

Donc $x+y-4 > 0$

Donc $x+y-4 \neq 0$

Donc $x-y = 0$

Donc $x = y$

D'où : $(x \neq y) \Rightarrow (x^2-4x \neq y^2-4y)$

Exercice 10 : (Raisonnement par L'absurde)

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x-\sqrt{x^2+1} < 0$

Rappel 09 :

Résonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition P est vraie

On suppose que $\overline{P}$ est vraie et on montre

que cela entraine une proposition fausse

Donc on conclut que P est vraie

Solution

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

On suppose que: $\left(\exists x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) : \frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3}$

$$\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(4x+1) = 4(3x-2)$$
$$\Leftrightarrow 12x+3 = 12x-8)$$
$$\Leftrightarrow 3 = 8$$

Contradiction

Donc : $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

On suppose que : $(\exists n \in \mathbb{N})$; $\frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N}$

$$\frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6n+5}{4n+2} = k \ ; avec\ k \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow 6n+5 = k(4n+2) \ ; k \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow 6n+4+1 = k(4n+2) \ ; k \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow 2(3n+2)+1 = 2k(2n+1) \ ; k \in \mathbb{N}$$

Or l'entier $2(3n+2)+1$ est impair

et $2k(2n+1)$ *pair*

Donc contradiction

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x-\sqrt{x^2+1} < 0$

On suppose que $(\exists x \in \mathbb{R})$; $x-\sqrt{x^2+1} \geq 0$

$$x-\sqrt{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x^2+1}^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq x^2+1$$
$$\Leftrightarrow 0 \geq 1$$

Donc contradiction

D'ou: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x-\sqrt{x^2+1} < 0$

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3
2) Montrer par récurrence que ;

$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) En déduire que $n(n+1)$ est pair
4) Calculer S_{100}

Rappel 10 : Résonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$ et n_0 un entier donné

Pour montrer que la proposition

$''(\forall n \geq n_0)\ ;\ p(n)\,''$, est vraie ; on suit les trois étapes suivantes :

- **Initialisation :** Pour $n = n_0$, on vérifie que la proposition $p(n_0)$ est vraie
- **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$
  Supposons que $p(n)$ est vraie
  et montrons que $p(n+1)$ est vraie
- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence en conclut que :

  $(\forall n \geq n_0);\ p(n)$ est vraie

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

- Calculer S_1 ; S_2 et S_3

$S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 2 = 3$

$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

- Montrer par récurrence que ;

$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*): 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Pour $n = 1$ on a : $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que : $1 + 2 + \cdots (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons : $1 + 2 + \cdots (n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$* \ 1 + 2 + \cdots (n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- D'après le principe de récurrence en conclut que :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) En déduire que $n(n+1)$ est pair

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Donc : $n\,(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

Donc : $n\,(n+1) = 2k$

(tel que $k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \in \mathbb{N}$)

Donc $n\,(n+1)$ est pair

4) Calculer S_{100}

$$S_{100} = \frac{100 \times (100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Exercice 12 : Montrer par récurrence que ;

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: « $7^n - 2^n$ est divisible par 5 »
2) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 + 4 + 4^2 + \cdots\cdots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$
3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $1 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n \geq n$

Solution

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: « $7^n - 2^n$ est divisible par 5

- Pour $n = 1$ on a : $7^1 - 2^1 = 5$
  et 5 est divisible par 5

  Donc la proposition est vraie pour $n = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $7^n - 2^n$ est divisible par 5

Et montrons que $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

On a $7^n - 2^n$ est divisible par 5

Donc : $7^n - 2^n = 5k$; *tel que* $k \in \mathbb{N}$

Donc : $7^n = 5k + 2^n$; *tel que* $k \in \mathbb{N}$

Or: $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7 \times 7^n - 2 \times 2^n$
$$= 7(5k + 2^n) - 2 \times 2^n$$
$$= 7 \times 5k + 7 \times 2^n - 2 \times 2^n$$
$$= 7 \times 5k + 5 \times 2^n$$
$$= 5(7k + 2^n)$$

Donc $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

- D'après le principe de récurrence en conclut que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: « $7^n - 2^n$ est divisible par 5

2)Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$4^0 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$

- Pour $n = 0$ on a : $4^0 = 1$ et $\frac{4^{0+1}-1}{3} = 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que :

$$4^0 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Montrons que :

$$4^0 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n + 4^{n+1} = \frac{4^{n+2} - 1}{3}$$

$$4^0 + 4 + \cdots + 4^n + 4^{n+1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} + 4^{n+1}$$

$$= \frac{4^{n+1} - 1 + (3 \times 4^{n+1})}{3}$$

$$= \frac{4 \times 4^{n+1} - 1}{3}$$

- D'après le principe de récurrence en conclut que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 4 + 4^2 + \cdots\cdots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

- Pour $n = 1$ on a : $1 = \left[\frac{1\times(1+1)}{2}\right]^2$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que :

$$1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Et montrons :

$$1 + 2^3 + \cdots + (n)^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$1 + 2^3 + \cdots + (n)^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

- D'après le principe de récurrence en conclut que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n \geq n$

- Pour $n = 0$ on a : $2^0 = 1 \geq 0$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $2^n \geq n$

Et montrons que : $2^{n+1} \geq n + 1$

On a : $2^n \geq n$ *et on a* $2 \geq 1$

Donc $2^n \geq n$ *et* $2^n \geq 1$

Donc: $2^n + 2^n \geq n + 1$

Donc: $2 \times 2^n \geq n + 1$

Donc: $2^{n+1} \geq n + 1$

- D'après le principe de récurrence en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^n \geq n$

Exercice 13 :

1) Développer le produit : $(n+1)(2n+1)$

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*): 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution

1) Développer le produit : $(n+2)(2n+3)$

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

$$= 2n^2 + 7n + 6$$

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*): 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Pour $n = 1$ on a : $1 = \frac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

Supposons que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Et montrons :

$$1^2 + 2^2 + \cdots n + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- D'après le principe de récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*): 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$