

Niveau : Premier bac  
sciences maths

# Devoir surveillé 1 corrigé

Premier bac sciences maths

## Modèle 2

- Notions de logique (10 points)
- Ensembles et applications (10 points)

Collection FMATHS



Prof fayssal

[www.elboutkhili.jimdofree.com](http://www.elboutkhili.jimdofree.com)

6p

Exercice 01

- 1 **1) a)** Montrer que :  $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; (a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$
- 0,5 **b)** Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$
- 1 **c)** Montrer que :  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2: (x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \neq 2)$
- 2)** Soit  $q$  un réel ; on pose :  $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  tel que  $n \in \mathbb{N}$
- 0,5 **a)** On suppose que  $q = 1$  ; calculer  $S_n$  en fonction de  $n$
- 1 **b)** On suppose que  $q \neq 1$  ; Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$
- 0,5 **3)** On considère l'équation (E) :  $x \in \mathbb{R}: \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$
- 1,5 **a)** Déterminer D l'ensemble de définitions de l'équations (E)
- b)** Résoudre dans D l'équation (E)

3p

Exercice 02

Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- 0,5 **1)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  , vérifier que  $(\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}): \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$
- 0,5 **2)** Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$
- 1 **3)** En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$
- 1 **4)** Montrer que la proposition  $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_n \leq M$  est fausse

6p

Exercice 03

Soient  $f$  et  $g$  deux applications tels que :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; g: ]1; +\infty[ \rightarrow ]2; +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \cos(x) ; x \mapsto g(x) = \frac{2x+10}{x-1}$$

- 1 **1)** Déterminer  $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$
- 1 **2) a)** Montrer que l'application  $f$  n'est pas injective.
- 1 **b)** Montrer que l'application  $f$  n'est pas surjective
- 1,5 **3) a)** Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
- 1,5 **4)** Soit l'ensemble  $A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{2n+10}{n-1} \in \mathbb{N} \right\}$  , écrire l'ensemble A en extension

5p

Exercice 04

Soient  $A, B$  et  $C$  les trois ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\} ; B = \left\{ \frac{5\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } C = \{x + y\sqrt{2} / (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$$

- 1 **1)** Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$
- 1 **2) a)** Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- 1 **b)** Montrer que :  $E \neq \emptyset$  et que :  $0 \notin E$ .
- 3)** Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$ .
- 1+1 Montrer que  $\frac{1}{a} \in E$  et  $ab \in E$ .



## Exercice 01

1)a) Montrer que :  $\forall (a ; b) \in \mathbb{R}^2 ;$ 

$$(a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$$

b) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$ c) Montrer que :  $\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2 :$ 

$$(x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \neq 2)$$

2) Soit q un réel ; on pose :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}$$

a) On suppose que  $q = 1$  ; calculer  $S_n$  en fonction de nb) On suppose que  $q \neq 1$  ; Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ 

3) On considère l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

a) Vérifier que  $\forall x \in [1 ; +\infty[ :$ 

$$x+3-4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-2)^2$$

b) Déterminer D l'ensemble de définition de l'équations (E)

c) Résoudre dans D l'équation (E)

## Solution de l'exercice 1

1)a) Soient a et b deux réels positifs ; Montrer que :  $(a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$ Si  $a = 0$  et  $b = 0$  alors  $a + b = 0$ Montrons que :  $a + b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$ On a :  $a + b = 0$  et  $b \geq 0$ Donc :  $a = -b$  et  $b \geq 0$  donc  $-b \leq 0$ Donc :  $a \leq 0$  et on a :  $a \geq 0$ Donc  $0 \leq a \leq 0$  donc  $a = 0$ On a  $a + b = 0$  et  $a = 0$  donc  $b = 0$ Donc  $a = 0$  et  $b = 0$ b) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$ Soit  $x \in \mathbb{R}$ On a  $x^2 \geq 0$  donc  $x^2 + 1 \geq 1$ Donc  $\sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0$ Donc  $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ c) Montrer que :  $\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2 :$ 

$$x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \neq 2$$

Soit  $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ 

Par contraposée montrons que :

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

$$(*) : \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2$$

$$(*) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 + \sqrt{y^2 + 1} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 1 \text{ et } y^2 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

Donc  $\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2 :$ 

$$(x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \neq 2)$$

2) Soit q un réel ; on pose :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}$$

a) On suppose que  $q = 1$  ; calculer  $S_n$  en fonction de n

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1, (n+1) \text{ fois}$$

$$= n + 1$$

b) On suppose que  $q \neq 1$  ; Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ 

$$\text{➤ Pour } n = 0 \text{ on a : } S_1 = 1 \text{ et } S_0 = \frac{q^1-1}{q-1} = 1$$

Donc la proposition est vraie pour  $n = 0$ ➤ Soit  $n \in \mathbb{N}$ 

$$\text{Supposons que } S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\text{Et montrons } S_{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

$$S_{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1}-1 + (q-1)q^{n+1}}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+1}-1 + q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

➤ D'après le principe de récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

### 3) On considère l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

a) Déterminer  $D_E$  l'ensemble de définitions de l'équations (E)

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 1 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \end{aligned}$$

Donc  $D_E = [1; +\infty[$

b) Résoudre dans  $D_E$  l'équation (E)

Soit  $x \in [1; +\infty[$

$$(E) \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

On a :

$$\sqrt{x-1}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$\sqrt{x-1}-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$

$$\sqrt{x-1}-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 10$$

$$\sqrt{x-1}-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$$

| x                | 1                | 5               | 10              | $+\infty$ |
|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------|
| $ \sqrt{x-1}-2 $ | $-\sqrt{x-1}+2$  | $+\sqrt{x-1}-2$ | $\sqrt{x-1}-2$  |           |
| $ \sqrt{x-1}-3 $ | $-\sqrt{x-1}+3$  | $-\sqrt{x-1}+3$ | $\sqrt{x-1}-3$  |           |
| (E)              | $-2\sqrt{x-1}+5$ | 1               | $2\sqrt{x-1}-5$ | 10        |

Cas 1 :  $x \in [1; 5]$

$$(E) \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1}+5 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$S_1 = \{5\}$$

Cas 2 :  $x \in ]5; 10[$

$$(E) \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2 - \sqrt{x-1}+3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

$$S_2 = ]5; 10[$$

Cas 1 :  $x \in [10; +\infty[$

$$(E) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}-5 = 1$$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3$$

$$(E) \Leftrightarrow x = 10$$

$$S_3 = \{10\}$$

$$\text{Donc } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [5; 10]$$

### Exercice 02

Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , vérifier que

$$(\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}) : \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$$

2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

3) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_{2n} - 1 \geq \frac{n}{2}$

4) Montrer que la proposition

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n \leq M \text{ est fausse}$$

### Solution de l'exercice 2

Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , vérifier que

$$(\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}) : \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\text{Soit } k \in \{1; 2; \dots; n\}$$

$$\text{On a } k \leq n$$

$$\text{Donc } n+k \leq n+n$$

$$\text{Donc } n+k \leq 2n$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$$

2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

Soit  $n$  un entier naturel non nul,

$$\text{On a } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ et}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{Donc } S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{et puisque } (\forall i \in [1; n]) : \frac{1}{n+i} \geq \frac{1}{2n}.$$

On obtient que :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Car } \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$



3) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$

On a :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_{2^n} - S_n \geq \frac{1}{2}$  donc :

$$S_2 - S_1 \geq \frac{1}{2}$$

$$S_4 - S_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$S_8 - S_4 \geq \frac{1}{2}$$

.....

$$S_{2^n} - S_{2^{n-1}} \geq \frac{1}{2}$$

En sommant membre à membre ces inégalités on obtient alors

$$S_{2^n} - S_1 \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}$$

et comme  $S_1 = 1$  et  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

On trouve  $(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_{2^n} - 1 \geq \frac{n}{2}$ .

4) Montrer que la proposition

$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*): S_n \leq M$  est fausse

Supposons que la proposition

$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_n \leq M$  est vraie.

Soit alors  $M$  un réel vérifiant

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_n \leq M$ .

De ce qui précède on déduit que

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_{2^n} \leq M$  et par suite

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{n}{2} \leq M$ , donc  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \leq 2M$  ce qui

est absurde, car il n'existe aucun réel supérieur ou égal à tous les entiers naturels.

On en déduit que la proposition

$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_n \leq M$  est fausse.

### Exercice 03

Soient  $f$  et  $g$  deux applications tels que :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g: ]1; +\infty[ \rightarrow ]2; +\infty[$   
 $x \mapsto f(x) = \cos(x)$  ;  $x \mapsto g(x) = \frac{2x+10}{x-1}$

1) Déterminer  $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$

2) a) Montrer que  $f$  n'est pas injective.

b) Montrer que  $f$  n'est pas surjective

3) Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

4) Soit l'ensemble  $A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{2n+10}{n-1} \in \mathbb{N} \right\}$ ,  
 écrire l'ensemble  $A$  en extension

### Solution de l'exercice 3

Soient  $f$  et  $g$  deux applications tels que :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g: ]1; +\infty[ \rightarrow ]2; +\infty[$   
 $x \mapsto f(x) = \cos(x)$  ;  $x \mapsto g(x) = \frac{2x+10}{x-1}$

1) Déterminer  $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$

$$x \in f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc :

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) a) Montrer que  $f$  n'est pas injective.

On a :  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  et  $\frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$

Donc  $f$  n'est pas injective

b) Montrer que  $f$  n'est pas surjective

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}): -1 \leq \cos(x) \leq 1$

Par exemple le nombre 2 n'a pas

d'antécédant par l'application  $f$

Donc  $f$  n'est pas surjective

3) Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

$g: ]1; +\infty[ \rightarrow ]2; +\infty[$

$$x \mapsto g(x) = \frac{2x+10}{x-1} = 2 + \frac{12}{x-1}$$

Soit  $y \in ]2; +\infty[$

Montrons que l'équation  $f(x) = y$  admet une unique solution dans  $]1; +\infty[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+10}{x-1} = y$$

$$\Leftrightarrow 2x+10 = y(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x(2-y) = -10-y$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) = y+10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 2 \\ x = \frac{y+10}{y-2} \end{cases}$$

Donc :  $g^{-1}: ]2; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{x+10}{x-2}$$



4) Soit l'ensemble  $A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{2n+10}{n-1} \in \mathbb{N} \right\}$ ,

écrire l'ensemble A en extension

Remarquer que :  $\frac{2n+10}{n-1} = \frac{2(n-1)+2+10}{n-1} = 2 + \frac{12}{n-1}$

$$n \in A \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} / \frac{2n+10}{n-1} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} / 2 + \frac{12}{n-1} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} / \frac{12}{n-1} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } n-1 \text{ divise } 12$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } n-1 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \{2; 3; 4; 5; 7; 13\}$$

$$\text{Donc } A = \{2; 3; 4; 5; 7; 13\}$$

### Exercice 05

Soient A, B et C les trois ensembles :

$$A = \left\{ \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\} ; B = \left\{ \frac{5\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{et } C = \{x + y\sqrt{2} / (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$$

1) Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$

2) a) Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) Montrer que :  $E \neq \emptyset$  et que :  $0 \notin E$ .

3) Soient a et b deux éléments de E.

Montrer que  $\frac{1}{a} \in E$  et  $ab \in E$ . Ex

### Solution de l'exercice 5

Soient A, B et C les trois ensembles :

$$A = \left\{ \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\} ; B = \left\{ \frac{5\pi}{3} + \frac{2k\pi}{k} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{et } C = \{x + y\sqrt{2} / (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$$

1) Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$

Supposons que  $A \cap B \neq \emptyset$

On a :  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$  et  $x \in B$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\Rightarrow (\exists (k; k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\Rightarrow (\exists (k; k') \in \mathbb{Z}^2) / k - k' = \frac{1}{2}$$

Et on a  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k' \in \mathbb{Z}$  donc  $(k - k') \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

Donc la dernière proportion est fautive, ce qui veut dire qu'il n'existe aucun nombre réel qui appartient à l'ensemble  $A \cap B$  d'où :  $A \cap B = \emptyset$ .

2) a) Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\text{Donc } \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q$$

$$\in \mathbb{N}^* \text{ de plus } \text{pgcd}(p; q) = 1$$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ est pair} \Rightarrow p \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow p = 2k ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p^2 = 4k^2 ; k \in \mathbb{N} \text{ et } p^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ est pair} \Rightarrow q \text{ est pair}$$

Donc p est pair et q est pair ce qui est absurde car  $p \wedge q = 1$

D'où  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) Montrer que :  $E \neq \emptyset$  et que :  $0 \notin E$ .

Montrons que :  $E \neq \emptyset$

On a :  $1 \in E$  pour  $x = 1$  et  $y = 0$

$$\text{Car } (1; 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ et } (1)^2 - 2(0)^2 = 1,$$

Donc :  $E \neq \emptyset$

Montrons que :  $0 \notin E$  en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Supposons que :  $0 \in E$

$$\text{On a : } 0 \in E \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x + y\sqrt{2} = 0 \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1$$

$$\text{Si } y = 0 \text{ alors : } x = 0 \text{ car : } x + y\sqrt{2} = 0,$$

Donc la condition  $x^2 - 2y^2 = 1$  n'est pas vérifiée.

$$\text{Si } y \neq 0 \text{ alors : } \frac{x}{y} = -\sqrt{2} \text{ et cela est}$$

$$\text{impossible car } \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ et } -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Donc dans les deux cas, il n'existe aucun couple  $(x; y)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  qui vérifie :

$$x + y\sqrt{2} = 0 \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1$$

D'où :  $0 \notin E$



3) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$ .

Montrer que  $\frac{1}{a} \in E$  et  $ab \in E$

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  tels que :

$$a = x + y\sqrt{2} \text{ et } b = x' + y'\sqrt{2} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1 \text{ et } x'^2 - 2y'^2 = 1$$

avec :  $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et  $(x'; y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{1}{a} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = x - y\sqrt{2} \text{ ( car: } x^2 - 2y^2 = 1 \text{ )} \end{aligned}$$

En posant :  $x_1 = x$  et  $y_1 = -y$ ,

$$\text{On a : } \frac{1}{a} = x_1 + y_1\sqrt{2} \text{ avec } (x_1; y_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\text{et } x_1^2 - 2y_1^2 = x^2 - 2(-y)^2 = x^2 - 2y^2 = 1$$

Donc :  $\frac{1}{a} \in E$

$$\text{On a : } a.b = (x + y\sqrt{2})(x' + y'\sqrt{2})$$

$$= xx' + xy'\sqrt{2} + x'y\sqrt{2} + 2yy'$$

$$= (xx' + 2yy') + (xy' + x'y)\sqrt{2}$$

Puisque :  $(xx' + 2yy'; xy' + x'y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\text{Et : } (xx' + 2yy')^2 - 2(xy' + x'y)^2 =$$

$$x^2x'^2 + 4xx'yy' + 4y^2y'^2 - 2x^2y'^2 - 4xx'yy' - 2x'^2y^2$$

$$= x^2(x'^2 - 2y'^2) - 2y^2(x'^2 - 2y'^2)$$

$$= x^2 - 2y^2 = 1$$

Donc :  $a.b \in E$