Deuxième bac sciences maths

Série corrigée : Dérivation-Rolle-TAF

Deuxième bac sciences maths

Plan de chapitre 2 : Dérivation-Rolle-TAF

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

admin

Prof fayssal 0681399067 www.elboutkhili.jimdofree.com

Exercic 01

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par ;

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)+\text{aractan}\left(\frac{x-1}{x}\right)-\text{aractan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$

2) Calculer f(1) puis déduire que

$(\forall x\in]0\,;+\infty[)\,;\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\text{aractan}\left(\frac{x}{x+1}\right)-\text{aractan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

3) On pose : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\text{aractan}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)$

Montrer que $S_n=\text{aractan}\left(\frac{n}{n+1}\right)$, puis calculer $\lim_{n\to+\infty}S_n$

Exercic 02

1) f la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par ; $f(x)=sin(x)+cos(x)$

Montrer que f 's'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0;2\pi[$

2) g la fonction définie sur IR par ; $g(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)$

Montrer que l'équation $g'(x)=0$ admet trois solutions dans IR

Exercic 03

f et g deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$,tel que $g(0)=f(0)=0$

Soit $x\in[0;+\infty[$; montrer que : $(\exists c\in]0;x[):\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercic 04

1) Soient a et b deux réel tels que $0\le a\le b$

Montrer que $\frac{b-a}{1+b^2}\le arctan\ a-arctan\ b\le\frac{b-a}{1+a^2}$

2) Montrer que $(\forall x\in]0\,;+\infty[)$: $\frac{x}{1+x^2}\le arctan\ x\le x$

3) Montrer que $(\forall x\in]0\,;+\infty[)$: $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}<\frac{1}{2}$

4) Montrer que $(\forall x\in[0\,;+\infty[)$: $1-x\le cos\ x-1\le x+1$

5) Montrer que $(\forall x\in[0\,;+\infty[)$: $sin\ x\le x$

6) Montrer que $(\forall x\in[0\,;+\infty[)$: $1-\frac{x^2}{2}\le cos\ x$

Exercic 05

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on considère la fonction $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x)=x^n sin(\pi x)$$

1)Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n\in]0,1[$ tel que $f_n{}'(\alpha_n)=0$

2)Montrer que $f_n(\alpha_n)=-\pi\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n}cos(\pi\alpha_n)$

3)Calculer $\lim_{n\to+\infty}f_n(\alpha_n)$

Exercic 06

f une fonction définie sur $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

et (U_n) une suite tel que $U_0=2$ et $(\forall n\in IN)$: $U_{n+1}=f(U_n)$

1) Montrer que $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1;2[$

2) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)$: $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$

3) a) Montrer que $(\forall n\in IN)$: $1\le U_n\le 2$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Exercic 07

Soit f la fonction définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $f(x)=3\sqrt[3]{x+1}-x$

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2,3[$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J a déterminer

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en α et $(f^{-1})'(\alpha)=\frac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

4)a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $\in]5,6[$

b) Montrer que pour tout x dans $]-\infty;0[$ on a : $f^{-1}(x)<\frac{x\beta^2}{9-\beta^2}+\beta$

Exercic 01

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par ;

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$

2)Calculer f(1) puis déduire que

$$(\forall x\in]0\,;+\infty[)\,;\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

3) On pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)$$

Montrer que $S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

Solution

1) Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$

Les fonctions rationnelles $x\mapsto\frac{1}{2x^2}\,;\,x\mapsto\frac{x-1}{x}$ et $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme sommes des fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$

Soit $x\in]0\,;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{-2}{2x^3}}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}-\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{4x^4+1}+\frac{1}{x^2+(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+(1+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{4x^4+1}+\frac{x^2+(x+1)^2-[x^2+(x-1)^2]}{[x^2+(x-1)^2]\,[x^2+(1+x)^2]}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{4x^4+1}+\frac{4x}{4x^4+1}$$

Donc $(\forall x\in]0\,;+\infty[)\ f'(x)=0$

2)Calculer f(1) puis déduire que

$$(\forall x\in]0\,;+\infty[)\,;\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$f(1)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan(0)-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

et on a f est constante sur $]0\,;+\infty[$ car $(\forall x\in]0\,;+\infty[)\ f'(x)=0$

Donc $(\forall x\in]0\,;+\infty[)\ f(x)=f(1)=0$

Donc$(\forall x\in]0\,;+\infty[)\ \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$

3) On pose : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2\,k^2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right);\quad d'après\ 2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{k=n}\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\sum_{p=0}^{n-1}\arctan\left(\frac{p}{p+1}\right)\quad ,on\ pose\ p=k-1$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)+\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)-\arctan\left(\frac{0}{0+1}\right)-\sum_{p=1}^{n-1}\arctan\left(\frac{p}{p+1}\right)$$

$$=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)-\arctan\left(\frac{0}{0+1}\right)$$

$$S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\quad \text{car}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}S_n=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 02

1)f la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par ; $f(x)=sin(x)+cos(x)$

Montrer que f 's'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0;2\pi[$

2) g la fonction définie sur IR par ; $g(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)$

Montrer que l'équation $g'(x)=0$ admet trois solutions dans IR

Solution :

1)On a f est continue sur l'intervalle $[0;2\pi]$ comme somme de deux fonctions continue sur $[0;2\pi]$

- f est dérivable sur l'intervalle $]0;2\pi[$ comme somme de deux fonctions dérivable sur $]0;2\pi[$; Et on a : $f(0)=f(2\pi)=1$

Donc d'après théorème de ROLLE on a : $(\exists c\in]a;b[):\ f'(c)=0$

Donc f 's'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0;2\pi[$

2) g est continue et dérivable IR et $g(-2)=g(0)=g(1)=g(3)$

Donc d'après théorème de ROLLE on a : $(\exists\ c_1\in]-2;0[):\ g'(c)=0$

et $(\exists\ c_2\in]0\,;1[):\ g'(c)=0$

et $(\exists\ c_3\in]1;3[):\ g'(c)=0$

Exercic 03

f et g deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ tel que $g(0)=f(0)=0$

Soit $x\in[0;+\infty[$; montrer que : $(\exists c\in]0;x[):\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Solution :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Leftrightarrow f(x)g'(c)-g(x)f'(c)$$

Soit $x\in[0;+\infty[$; Considérons la fonction h définie sur $[0;x]$ par : $h(t)=f(t)g(x)-g(t)f(x)$

- On a h est continue et dérivable sur$[0;x]$ comme somme de deux fonctions continue sur $[0;x]$
  de plus $h'(t)=f'(t)g(x)-g'(t)f(x)$
- Et on a $h(x)=h(0)=0$; car $g(0)=f(0)=0$

Donc d'après théorème de ROLLE on a : $(\exists c\in]0;x[):\ h'(c)=0$

Donc on a : $(\exists c\in]0;x[):\ f'(c)g(x)-g'(c)f(x)=0$

- $(\exists c\in]0;x[):\ f'(c)g(x)=g'(c)f(x)$
- $(\exists c\in]0;x[):\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(x)}$

Exercic 04

1) Soient a et b deux réel tels que $0\le a\le b$

Montrer que $\frac{b-a}{1+b^2}\le arctan\,b-arctan\,a\le\frac{b-a}{1+a^2}$

2) Montrer que $(\forall x\in]0\,;+\infty[):\ \frac{x}{1+x^2}\le arctan\,x\le x$

3) Montrer que $(\forall x\in]0\,;+\infty[):\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}<\frac{1}{2}$

4) Montrer que $(\forall x\in [0\,;+\infty[):\ 1-x\le cos\,x-1\le x+1$

5) Montrer que $(\forall x\in [0\,;+\infty[):\ sin\,x\le x$

6) Montrer que $(\forall x\in [0\,;+\infty[):\ 1-\frac{x^2}{2}\le cos\,x$

Solution :

1) Soient a et b deux réel tels que $0 \leq a \leq b$

Montrons que $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$

Considérons la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \arctan t$$

f est dérivable sur IR et on a :$(\forall x \in IR)$: $f'(x) = \frac{1}{1+t^2}$

Par application de T.A.F à la fonction f sur $[a;b]$

$(\exists c \in]a;b[)$: $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$

Donc : $(\exists c \in]a;b[)$: $\arctan b - \arctan a = (b-a) \times \frac{1}{1+c^2}$

$$c \in]a;b[\Rightarrow a^2 < c^2 < b^2$$

$$\Rightarrow 1 + a^2 < 1 + c^2 < 1 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} \leq (b-a) \times \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{b-a}{1+a^2} \text{ (Car } b-a \geq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

2) Montrer que $(\forall x \in]0\,;+\infty[)$: $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$

Considérons la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \arctan t$$

f est dérivable sur IR et on a :

$$(\forall x \in IR): f'(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

Soit $x \in [0\,;+\infty[$

Par application de T.A.F la fonction f sur $[0;x] \subset [0\,;+\infty[$ on a :

$(\exists c \in]0;x[)$: $f(x) - f(0) = (x-0)\, f'(c)$

$(\exists c \in]0;x[)$: $\arctan x = \frac{x}{1+c^2}$

$$c \in]0;x[\Rightarrow 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+c^2} \leq x \quad ; \text{ (Car } x \geq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

3) Montrer que $(\forall x \in]0\,;+\infty[)$: $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} < \frac{1}{2}$

Considérons la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

f est dérivable sur IR et on a :$(\forall x \in]-1\,;+\infty[)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Soit $x \in]-1\,;+\infty[$

Par application de T.A.F à la fonction f sur $[0;x] \subset]-1\,;+\infty[$ on a

$(\exists c \in]0;x[): \quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$

Donc : $(\exists c \in]0;x[): \quad \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{c+1}}$

$$c \in]0;x[\Rightarrow 1 < 1+c \Rightarrow 1 < \sqrt{1+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} < \frac{1}{2}$$

Donc : $(\forall x \in]0\,;+\infty[); \quad \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} < \dfrac{1}{2}$

4) Montrer que $(\forall x \in [0\,;+\infty[): \; 1-x \leq \cos x - 1 \leq x+1$

Considérons la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \cos x$

f est dérivable sur IR et on a : $(\forall x \in \mathrm{IR}): f'(x) = -\sin x$

Soit $x \in [0\,;+\infty[$

Par application de T.A.F la fonction f sur $[0;x] \subset [0\,;+\infty[$ on a :

$(\exists c \in]0;x[): \quad f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$

$(\exists c \in]0;x[): \quad \cos x - 1 = -x \sin c$

$$c \in]0;x[\Rightarrow -1 < -\sin c < 1$$

$$\Rightarrow -x \leq -x \sin c \leq x$$

$$\Rightarrow -x \leq \cos x - 1 \leq x$$

$$\Rightarrow 1-x \leq \cos x \leq x+1$$

5) Montrer que $(\forall x \in [0\,;+\infty[): \; \sin x \leq x$

Considérons la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \sin t$$

f est dérivable sur IR et on a :

$$(\forall x \in \mathrm{IR}): f'(x) = \cos t$$

Soit $x \in [0\,;+\infty[$

Par application de T.A.F la fonction f sur $[0;x] \subset [0\,;+\infty[$ on a :

$(\exists c \in]0;x[): \quad f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$

$(\exists c \in]0;x[): \quad \sin x = x \cos c$

$$c \in]0;x[\Rightarrow \cos c < 1$$

$$\Rightarrow x \sin c \leq x$$

$$\Rightarrow \sin x \leq x$$

6) Montrer que $(\forall x \in [0\,;+\infty[): \; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Considérons la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \cos t + \frac{t^2}{2} - 1$$

f est dérivable sur IR et on a : $(\forall x \in \mathrm{IR}): f'(x) = -\sin t + t$

Soit $x \in [0\,;+\infty[$

Par application de T.A.F la fonction f sur $[0;x] \subset [0\,;+\infty[$ on a :

$(\exists c \in]0;x[): \quad f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$

$(\exists c \in]0;x[): \quad \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1 = x(\, c - \sin c\,)$

On a d'après la question 4) ; $(\forall x \in [0\,;+\infty[): \; \sin x \leq x$

Donc: $\quad \sin c < c$

Donc: $\quad 0 < c - \sin c$

Donc: $\quad 0 \leq x(c - \sin c) \quad$; *car* $x \in [0\,;+\infty[$

Donc: $\quad 0 \leq \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$

D'où: $(\forall x \in [0\,;+\infty[): \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$

Exercic 05

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$f_n(x) = x^n sin(\pi x)$

1)Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n{}'(\alpha_n) = 0$

2)Montrer que $f_n(\alpha_n) = -\pi \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n} cos(\pi\alpha_n)$

3)Calculer $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)$

Solution :

1)En utilisant théorème de ROLLE Montrons qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n{}'(\alpha_n) = 0$

On la fonction $x \mapsto \pi x$ est continue sur $[0 ; 1]$

Et on la fonction $x \mapsto sin(x)$ est continue sur IR

Don la fonction $x \mapsto sin(\pi x)$ est continue sur $[0 ; 1]$

Et On a la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0 ; 1]$

D'où f_n est continue sur $[0 ; 1]$; (Produit des fonctions continues)

f_n est dérivable sur $]0,1[$;

De plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$

D'après théorème de ROLLE on a :

$$(\exists \alpha_n \in]0;1[):\ f'(\alpha_n) = 0$$

2)Montrons que $f_n(\alpha_n) = -\pi \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n} cos(\pi\alpha_n)$

$f_n{}'(x) = nx^{n-1}sin(\pi x) + \pi x^n cos(\pi x)$

$= x^{n-1}[n\, sin(\pi x) + \pi\, x\, cos(\pi x)]$

$f'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_n)^{n-1}[n\, sin(\pi\alpha_n) + \pi\, \alpha_n\, cos(\pi\alpha_n)] = 0$

$\Leftrightarrow n\, sin(\pi\alpha_n) + \pi\, \alpha_n\, cos(\pi\alpha_n) = 0$ (car $\alpha_n \neq 0$)

$\Leftrightarrow sin(\pi\alpha_n) = -\pi \frac{\alpha_n}{n} cos(\pi\alpha_n)$

$\Leftrightarrow (\alpha_n)^n sin(\pi\alpha_n) = -\pi \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n} cos(\pi\alpha_n)$

Donc on a : $f_n(x) = x^n sin(\pi x) = -\pi \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n} cos(\pi\alpha_n)$

3) $|f_n(x)| = \left|-\pi \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n} cos(\pi\alpha_n)\right|$

$= \frac{\pi}{n}|(\alpha_n)^{n+1} cos(\pi\alpha_n)|$

$< \frac{\pi}{n}$

Car $|(\alpha_n)^{n+1}| < 1$ et $|cos(\pi\alpha_n)| \leq 1$

Donc $|f_n(x)| < \frac{\pi}{n}$ et on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

Exercice 06

f une fonction définie sur $I = [1;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

et (U_n) une suite tel que $U_0 = 2$ et $(\forall n \in IN): U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que l'équa $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]1;2[$

2) Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[): |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) a) Montrer que $(\forall n \in IN): 1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution :

1)Considérons la fonction g tel que ; $g(x) = f(x) - x$

- g est continue sur $[1;2]$ car c'est une somme de deux fonctions continue sur $[1;2]$
- g est dérivable sur l'intervalle $]1;2[$car c'est une somme de deux fonctions dérivable sur $]1;2[$

et $(\forall x \in]1;2[)$: $g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1 < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]1;2[$

D'où g est une bijection de $]1;2[$ vers

$g(]1;2[) =]g(2);g(1)[= \left]-1+\frac{1}{\sqrt{2}};1\right[$

Et comme $0 \in g(]1;2[)$

Donc il existe une solution unique $\alpha \in]1;2[$tel que $g(\alpha) = 0$

c-à-d il existe une solution unique $\alpha \in]1;2[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2) On a $(\forall x \in [1;+\infty[)$: $|f'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ et $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) a)Montrons par récurrence que $(\forall n \in IN): 1 \leq U_n \leq 2$

- Pour n=0 on a : $1 \leq U_0 = 2 \leq 2$ donc PV pour n=0
- Soit $n \in IN$

Supposons que $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

f est dérivable sur $]1;2[$ et $(\forall x \in]1;2[)$: $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $[1;2]$ donc

$$1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow f(2) \leq f(U_n) \leq f(1) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad (\text{car } 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

- Donc $(\forall n \in IN): 1 \leq u_n \leq 2$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

On a f est continue sur $[1;2]$et on a f est dérivable sur $]1;2[$

et on a $(\forall x \in]1;2[)$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

On applique l'inégalité d'accroissement fini entre u_n et α

car $(\forall n \in IN)$; $U_n \in]1;2[$ et $\alpha \in]1;2[$ On trouve

$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$; Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$

c)Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

- Pour n=0 on a : $|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$
- Pour n=1 on a : $|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$
- …………………
- Pour n-2 on a : $|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha|$
- Pour n-1 on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

On multiplie les inégalités terme à terme on trouve

- $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$