Cours détaillé 7

Polynôme

Tronc commun
Sciences

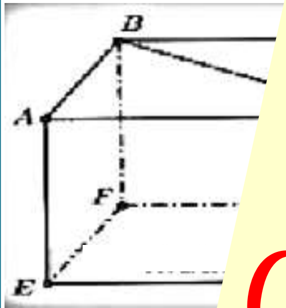
Prof Fayssal https://elboutkhili.jimdofree.com/

I) Approche sur les polynômes -égalité de deux polynômes

1) Généralités sur les polynômes

Activité :

La figure ci-contre r ... llélépipède rectangle dont les dimensions 1(x ... une variable x telles que : $h(x) =$



1)Remarquo
forme f(x) =
premier deg
On rappell
dont l'ord
a.

2) soit S(
parallélé
Après calcul, on tro

$$\begin{cases} S(x) = (x-1)\times(3x+2) = 3x \ldots \\ V(x) = (3x^2 - x - 2)\times(2x-3) = 6x^3 - 11x \ldots \end{cases}$$

Vocabulaire :

- L'expression $S(x) = 2x^2 - x - 2$ est appelé polynôme de degré 2
- Nombres 2 ; -1 et -2 sont appelé les coefficients de polynôme
- L'expression $V(x) = 6x^3 - 11x^2 - x + 2$ est appelé polynôme de degré 3
- Les nombres 6 ; -11 ; -1 et 2 sont les coefficients de polynôme

Définitions :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n$ des nombres réels
Un polynôme ou fonction polynôme est une expression de la
... $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
... a_n sont appelé les coefficients de

... s coefficients sont nuls
... P , on écrit $d^oP = n$

... pelé monôme de 1ère

... ppelé monôme de 2ème

... est appelé binôme de 1ère

... ynôme est appelé trinôme

... que :
... $^3 + (b-1)x^2 + 3cx + d$
... $P(x) = Q(x)$

Propriété :

Soient P et Q deux polynôm... ls que :

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et

$Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$; Alors :

$P(x) = Q(x)$ ssi $d^oQ = d^oP$ et $a_n = b_m$; $a_{n-1} = b_{m-1}$ …… ; $a_0 = b_0$

3) Somme et produit ... polynômes

Activité :

1) Calculer $P(x$ ...

$P(x) = 2x^2 - 3x +$ ...

$P(x) = 2x^2 - 3x +$ ...

2) Calculer P ...

$P(x) = 3x + 5$ *et* ...

$P(x) = x^2 + 5$ *et* ...

Propriété :

- La somm ...
  noté par ...

$(P + Q)(x) =$ ...

- Le proc ...
  noté p ...

$(P \times Q)(x) =$ ...

II) Racine ...

1) Raci ...

Activité :

1) Soit P polynôme tels que : ...

Calculer P(1) puis déterminer a et b tel que :

$$P(x) = (x - 1)(ax + b)$$

On a P(1)=0 donc on dit que 1 est racine du polynôme P

2) Soit Q polynôme tels que : $Q(x) = x^3 - 5x + 2$

Calculer Q(2) puis déterminer a et b tel que :

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bc + c)$$

Définition : $(a \in \mathbb{R})$

On dit que a est un racine (ou zéro) d'un polynôme P(x) si et seulement si P(a)=0

2) Division d'un polynôme par x-a

Activité :

Soit P polynôme tels que : $P(x) = x^2 - 5$

... P(2) puis vérifier que : $P(x) = (x - 2)(x + 2) + P(2)$

... le quotient de la division euclidienne

... division euclidienne de

... e : $\frac{x^2-5}{X-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$

... $\mathbb{N}$) et $a \in \mathbb{R}$

... $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$

... uotient de la division

... de la division euclidienne de

$P(x)$ ...

Cas particulier

Si P(a)=0 on obtient $P(x) = (x - a)Q(x)$

Dans ce cas on dit

- Le polynôme P(x) est divisible par x-a
- Le polynôme P(x) est factorisé par x-a

Exercice 1

1) Montrer que 5 est racine du polynôme $P(x) = x^2 - 6x + 5$

2) Factoriser $P(x)$

Cor

1) Montrer que 5 est racine du

$P(5) = 5^2 - 6 \times 5 + 5 = 0$

Donc 5 est racine du polynôm

2) Factorisé $P(x)$

On a $P(5) = 0$ donc $P(x) =$

Donc $P(x) = ax^2 + bx - 5a$

Donc $a = 1$ et $b - 5a = -6$

Donc $a = 1$ et $b = -1$

Donc $P(x) = (x-5)(x-$

3) Méthode pour déterm

Soit P polynôme tels qu

Déterminer Q(x) tel qu

1ère méthode : Factor

$$
\begin{array}{l}
\ \ 2x^3 + x^2 - 3 \\
-\ 2x^3 + 2x^2 \\
\hline
\ \ \ 0 + 3x^2 - 3 \\
\ \ \ \ -3x^2 + 3x \\
\hline
\ \ \ \ \ \ 0 + 3x - 3 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ -3x + 3 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 + 0
\end{array}
$$

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x-1)(2x^2 + 3x + 3)$

Exemple 2 : Factorisation par a division euclidienne

Soit P polynôme tels que : $P(x) = x^3 + x + 4$

Déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x+1)Q(x) + P(-1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x + 4 & x + 1 \\
\cline{2-2}
x^3 + x^2 & x^2 - x + 2 \\
\cline{1-1}
\ \ \ \ \ \ \ \ + 4 &
\end{array}
$$

ORNER :

1)

	1	
	-3	1
	3	reste=0

On obtient : $(2x^2 + 3x + 3)$

Exercic 2

On considère le polynôme $P(x) = 2$ … $^2 - 9x + 2$

1) Vérifier que 0 n'est pas une raci…

2) a) Montrer que 2 est une racin…

b) En effectuant la division eu…

$x - 2$ déterminer un polynôme …

3) a) Montrer que si a une racin…

racine de $P(x)$.

b) En déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right) =$ …

c) Déterminer les réels a, …

$Q(x) =$ …

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équati…

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équat…

Corr…

On considère le polynôme …

1) Vérifier que 0 n'est pa…

$On\ a\ P(0) = 2$ donc 0 n'…

2) a) Montrer que 2 est une racin…

$On\ a\ P(2) = 0$ donc 2 est une racine de $P(x)$.

b)En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$ déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$

$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$ | $x - 2$

… $4x^3$ | $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

… $x + 2$

…ussi une

$= \frac{\dots}{\dots}$

$= \frac{P(a)}{a^4}$

$= \frac{0}{a^4} = 0 \quad car\ a\ racine\ de\ P(x)$

b) En déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

On a 2 est racine de P(x)

Donc d'après la question p ... de P(x)

Donc $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

c) Déterminer le

: $Q(x) = \left(x -\right.$

On a $Q(x) = 2x^3 - 5x$

Et on a

$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2$

$= ax^3$

$= ax^3$

Donc $a = 2$ et b

Donc $a = 2$ et

Donc $a = 2$ et

$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0$ donc $(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) = 0$

donc $2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 1) = 0$

donc $2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)^2 = 0$

donc $x - 2 = 0$ ou $x - \frac{1}{2} = 0$ ou $x - 1 = 0$

donc $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$

$S = \left\{2; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

$-\frac{1}{2}$ ou $x =$