Niveau : Deuxième bac sciences maths

Devoir surveillé 5 corrigé

Deuxième bac sciences maths

Modèle 3

- **Nombres complexes** **(06 points)**
- **Calcul d'intégrale** **(14 points)**

Semestre 02

6p **Exercice 01**

Soit a un nombre complexe différent de $1-i$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) : $z^2 -$ … $1-i)z + 2a^2 - 4i = 0$

1,5 1) Calcule … soudre l'équation (E)

1,5 2) On co… $C(a+ia-2i), \Omega(2-2i)$

Déterm… le vecteur $\vec{u}$ de la

transla…

3) Soit

1 a) Mo…

0,5 b) Do… $A(a)$

4) O…

1 a) D…

0,5 b) …

5

2,5 1) … dx

2…

1,5 … $= -x)$

1

4

Pou…

1,5 1) Montrer que : $\forall u \geq 0$: …

1 2) En déduire que: $\forall n \in IN$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n} \int_0$ …

1,5 3) Montrer que: $\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ $\forall n \geq 0$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

6p **Exercice 04**

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$

1 1)a)Calculer $F(1)$ puis montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$

1 b) En déduire que : $F(x) = 0$ $\forall x \in]0,+\infty[$

2)Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

1 $$F(x) = \ln(x)\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}dt \;\; \forall x > 0$$

1 3) Montrer que : $\forall x > 0$: $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

1 4) En déduire que : $\forall x > 0$: $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ln x$

Exercice 01

Soit a un nombre complexe différent de $1-i$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) : $z^2-2(a+1-i)z+2a^2-4i=0$

1) Calculer $(a-1+i)^2$ ...is résoudre l'équation (E)

2) On considère les poi... $+2), C(a+ia-2i), \Omega(2-2i)$

Déterminer l'affixe de... ...iner le vecteur $\vec{u}$ de la translation

t qui transforme A en

3) Soit la ration $R\Big(\Omega$

a) Montrer que $R(C$

b) Donner une mét

4) On pose : $a=b($

Déterminer les affi... ...es

Soit a un nombr

(E) : $z^2-2(a+$

1) Calculer $(a-$

On a : $(a-1+$

Donc : $(a-1$

On a : (E) : z^2

Et on a : $\Delta=$

Soit $\delta=2i(a-1+i)$ une racine ... E) sont :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{2(a+1-i)+2i(a-1+i)}{2}=a+1-i+ia-\ldots \\ z_2=\dfrac{2(a+1-i)-2i(a-1+i)}{2}=a+1-i-ia+i+1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} z_1=a+ia-2i \\ z_2=a-ia+2 \end{cases}$ sont les deux solutions de (E)

2) On considère les points $A(a), B(a-ia+2), C(a+ia-2i), \Omega(2-2i)$

Déterminer l'affixe de I le milieu de $[BC]$ puis déterminer le vecteur $\vec{u}$ de la translation t qui transforme A en I

On a : $z_1=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{2a+2-2i}{2}$ donc : $z_I=a+1-i$

Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation t qui transforme A en I Càd : $t_{\vec{u}}(A)=I$

Donc : $\overrightarrow{AI}=\vec{u}$ et on a : aff $(\overrightarrow{AI})=z_1-z_A=a+1-i-a$

Donc $\vec{u}(1-i)$ est le vecteur de la translation $t_{\vec{u}}$

3) Soit la ration $R\left(\Omega;-\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Montrer qu … déduire que $(BC)\perp(\Omega I)$

$R(C)=B \quad \Leftarrow$

$\Leftarrow$

Et on a :

$-i(z_C-\omega)$

Donc : z_B

D'où : $R($

On a : R

Donc :

D'où l … eu $[BC]$

Donc

b) D … $A(a)$

Du … $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}(1-i)$

On

On … $(2-2i)$, la droite

perpendic… n distingue entre B et

C en utilisant la relation (…

4) On pose : $a=b(1+i)-2i$ où $b\in\mathbb{R}$

a) Déterminer les affixes de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de b,

$$\begin{aligned} aff(\overrightarrow{CB}) &= z_n - z_c = a - ia + 2 - a - ia + 2i \\ &= -2ia + 2 + 2i \\ &= -2i(b(1+i)-2i)+2+2i \\ &= -2ib(1+i)-4+2+2i \end{aligned}$$

Donc : aff $(\overrightarrow{CB}) = -2ib + 2b - 2 + 2i$

On a : aff $(\overrightarrow{CA}) = z_A - z_C = a - a - ia + 2i = -ia + 2i$

$$= -i(b(1+i)-2i)+2i = -ib(1+i)-2+2i$$

Donc : $aff(\overrightarrow{CA}) = -ib + b - 2 + 2i$

b) En déduire que A, B et C sont alignés

On a : aff $(\overrightarrow{CB}) = 2b(1-i)-2(1-i) = (2b-2)(1-i)$

et on a : aff $(\overrightarrow{CA}) = b(1-i)-2(1-i) = (b-2)(1-i)$

Et comme $b-2\in\mathbb{R}$ et $2b-2\in\mathbb{R}$

Alors $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$ d'où $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires

Exercice 02

1) Calculer les ... ivantes : $A=\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^x+2}dx$; $B=\int_{1}^{2}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

2)On pose : I ... $\frac{t\arctan(t)}{\dots}dt$

a) Calculer I ... x)

b) Déduire ...

1) Calcule ...

On a : A ...

Donc : A ...

On a : I ...

On po ...

B

$=\Big[$ ... x

D' oú : $B=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{\dots}{3}\right)$ ... $\frac{\dots}{2}$

2)On pose : $I=\int_{-1}^{t}t\arctan(t)dt$ et $J=\int_{-1}^{l}\frac{\text{tar}\dots}{e^t+1}$ ...

a) Calculer I et montrer que : $J=\int_{-1}^{t}\frac{e^t}{e^t+1}(t\arctan t)dt$ (poser $t=-x$)

On a : $I=\int_{-1}^{1}t\arctan(t)dt$

On pose : $u'(t)=t$, $u(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$ Et $v(t)=\arctan(t)$, $v'(t)=\frac{1}{t^2+1}$

Donc : $I=\left[\frac{t^2+1}{2}\arctan(t)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dt$ d'où : $I=\frac{\pi}{2}-1$

On a : $J=\int_{-1}^{1}\frac{t\arctan(t)}{e^t+1}dt$

On pose : $x=-t$ on a : $dt=-dx$

Si $t=-1$ alors $x=1$

Si $t=1$ alors $x=-1$

Donc : $J=\int_{1}^{-1}\frac{-x\arctan(-x)}{e^{-x}+1}(-dx)=\int_{-1}^{1}\frac{x\arctan(x)}{e^{-x}(1+e^x)}(dx)$

D'où : $J=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}x\arctan(x)dx$

b) Déduire la va... de J

On a : $J = \int_{-1}^{1}$ ... $\arctan(t)dt$

Donc : $J =$

D'où : $J =$

Pour tou...

1) Mon...

2) En ...

3) Mo...

Pou...

1) ...

On sait que : $1 + q + q$...

On prend : $q = -u$ où $u \in \mathbb{R}^*$

Donc : $\sum_{i=0}^{n}(-u)^k = \frac{1-(-u)^{n+1}}{1-(-u)}$

D'où : v: $\sum_{t=0}^{n}(-1)^t u^t = \frac{1}{1+u} - \frac{(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u}$

2) En déduire que : $\forall n \in IN$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

On prend: $u = t^2$ dans la relation prècédente on trouve :

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i t^{2i} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Donc: $\int_0^1 \sum_{t=0}^{n}(-1)^2 t^{2s} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt + (-1)^- \int_0^1 \frac{t^{2+1}}{t^2+1} dt$

D'où : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = [\arctan(t)]_e^t + (-1)^- \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt$

D'où : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt$

Donc : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt$

3) Montrer que : $\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|\leq\frac{1}{2n+3}$ $\forall n\geq 0$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}S_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{t^2+1}dt\right|=\left|\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{t^2+1}dt\right|$$

Et on a: $t^2+1\geq 1$ donc : $0<\frac{1}{t^2+1}\leq 1$

D'où : $\forall t\in[0,1]$: $0<\frac{t^{2n+2}}{t^2+1}\leq t^{2n+2}$

Donc : $0<\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{t^2+1}dt\leq\int_0^1 t^{2n+2}dt$

Et on a : $\int_0^1 t^{2n+2}dt=\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1=\frac{1}{2n+3}$

Donc : $\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{t^2+1}$ … $\frac{1}{\ldots}$

D'où : $\left|S_n-\frac{\pi}{4}\right|$ …

On a : $\left|S_n-\right.$ …

Et on a: lim …

On consid…

1)a)Calc… $F'(x)$

b) En dé…

2)Mont… $x>0$

3) Mo…

4) E…

On … t

1)… calculer $F'(x)$

On a : $F(1)=\int_1$ … $\frac{\ldots}{1+t^2}$

La fonction $f: t\mapsto\frac{\ln\ t}{1+t^2}$ est continue sur]… $u: t\mapsto\ln\ t$

Et $v: t\mapsto 1+t^2$ sont continues sur $I=]0,+\infty[$ D'où f ad… fonction primitive φ définie et dérivable sur $I=]0,+\infty[$

On a : $F(x) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ $avec\ x \in I = \left]0,+\infty\right[$

La fonction $w: x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur I (fonction rationnelle) et $w(I) =]0,+\infty[\subset I$ et φ est dérivable sur I donc $\varphi \circ w$ est dérivable sur I

D'où $F = \varphi - \varphi \circ w$ est dérivable sur I

Et on a : $F'(x) = \varphi'(x) - w'(x)\varphi'(w(x)) = f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} \quad \forall x \in I$$

$$= \frac{\ln(x)}{x^2+1} - \frac{\ln(x)}{x^2+1} \quad \forall x \in I$$

Donc : $F'(x) = 0\ \forall x$ …

$b)$ En déduire que : …

On a : $F'(x) = 0$ av…

Donc F est une fo…

D'où : $\forall x \in I$: $F(x$…

Donc : $\forall x \in I$: $F($…

2) Montrer en u…

$\forall x$ …

On a : $F(x) =$ …

On pose : $u'($…

Et $v(t) = \ln$ …

Donc : $F($…

$= \ln$ …

$= \ln$ …

Donc : $F(x) = \ln x \left(\arctan x + \arctan\right.$ …

3) Montrer que : $\forall x > 0 : \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

On pose : $g(x) = \text{ar}$ … 1 … avec $x \in I$

La fonction g est d…

$g'(x) \quad = \frac{1}{1+x^2}$ …

$\quad = \frac{1}{1+x}$ …

Donc : $g'(x) =$ …

D'où g est un…

Donc : $\forall x >$ …

D'où : $\forall x >$ …

4) En dédu…

Soit $x > 0$ …

$F(x) = \text{l}$ …

Donc: $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x) - \int_{\frac{1}{x}}$ … $\frac{}{t}$

Et on a $F(x) = 0$ donc $\frac{\pi}{2}\ln(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t} dt$

Finalement : $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t} dt = \frac{\pi}{2}\ln(x)\ \forall x > 0$